

دنباله حسابی

به نام خدا

در قسمت قبل با الگوها و انواع اونها آشنا شدیم،

در این بخش دنباله رو تعریف می‌کنیم و بعد با دسته‌ی مهمی از دنباله‌های مهم آشنا می‌شیم، دنباله حسابی

دنباله:

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

با توجه با این تعریف:

- هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار گرفته باشن، تشکیل به دنباله میدن.
- نکته‌ای که باید بهوش توجه داشته باشیم اینه که یه دنباله ممکنه فاقد الگو باشه، پس لزومی نداره که اعداد یه دنباله، الگو داشته باشن
- جمله اول یه دنباله رو با t_1
- جمله دوم دنباله رو با t_2
- و به همین ترتیب، جمله n ام دنباله یا همون جمله عمومی رو با t_n نمایش میدیم.

اگه جمله عمومی یه دنباله رو داشته باشیم، بطوری می‌تونیم جمله‌های دنباله رو به دست بیاریم؟

اگه در جمله عمومی، به جای n ، عدد ۱ رو قرار بدیم جمله اول به دست میاد.

اگه در جمله عمومی به جای n ، عدد ۲ رو قرار بدیم جمله دوم به دست میاد.

اگه در جمله عمومی به جای n ، عدد ۳ رو قرار بدیم جمله سوم به دست میاد.

بنابراین ما هر جمله‌ای رو که فواستیم کافیه که توی جمله عمومی، بجای n ، شماره‌ش رو بذاریم.

دنباله حسابی

یاد تونه جلسه قبل الگوهای فطری رو تعریف کردیم، یه اسم دیگه‌ی این الگوها "دنباله حسابی" هست. بنابراین دنباله حسابی به صورت زیر تعریف میشه:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

پس خصوصیت اصلی دنباله حسابی اینه که هر جمله‌ش با اضافه شدن یه عدد ثابت به جمله قبلی به دست میاد.

اسم اون عدد ثابت "قدر نسبت" هست.

در دنباله‌های حسابی، برای به دست آوردن قدر نسبت، اختلاف دو تا جمله متوالی رو به دست میاریم.

۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی اند.

۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰,

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید. $t_1 = \square$, $d = \square$.

جمله اول دنباله چه عددی است؟ ۲۰۰۰، بنابراین:

$$t_1 = 2000$$

گفتیم برای به دست آوردن قدر نسبت، افتلاف دو تا جمله متوالی رو به دست میاریم، افتلاف جمله اول و دوم چند میشه؟ ۴، بنابراین:

$$d = 4$$

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟

تا جمله ششم رو داریم، برای نوشتن جمله بعدی بعد ۴ تا به جمله ششم اضافه می‌کنیم، جمله هشتم و نهم رو هم به همین ترتیب می‌نویسیم:

۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, ۲۰۲۴, ۲۰۲۸, ۲۰۳۲

بنابراین نهمین دوره المپیک در سال ۲۰۳۲ برگزار میشه:

ب) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_n	...	t_n	...
۲۰۰۰	$2000 + 1(4)$	$2000 + 2(4)$	$2000 + 3(4)$...	$2000 + (\dots)(4)$...	$2000 + (\dots)(4)$...

به t_2 و t_3 و t_4 و جملاتی که زیرشون نوشته شده توجه کنید:

t_2	t_3	t_4
$2000 + 1(4)$	$2000 + 2(4)$	$2000 + 3(4)$

چه ارتباطی بین اندیس t و عددی که در قدرنسبت ضرب شده وجود دارد؟

t_1	t_2	t_3
$2000 + 1(4)$	$2000 + 2(4)$	$2000 + 3(4)$

همینطور که می بینیم، عددی که در هر مرحله در قدرنسبت ضرب شده، یکی کمتر از اندیس t یا همون شماره جمله است.

حالا میفوییم t رو به دست بیاریم، چه عددی باید در 4 (قدرنسبت) ضرب بشه؟

خب به اندیس t یا همون شماره جمله نگاه می کنیم، چه عددی رو نشون میده؟ 9

پس عددی که در قدرنسبت ضرب میشه باید یکی کمتر باشه، یعنی 8 . بنابراین:

$$t_9 = 2000 + 8(4)$$

حالا میفوییم جمله عمومی رو بنویسیم، یعنی t_n ، شماره جمله n هست، پس عددی که

باید در 4 ضرب بشه چنده؟ یکی کمتر یعنی $n - 1$. بنابراین:

$$t_n = 2000 + (n - 1)(4)$$

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

بیست و چهارمین دوره رو میفوییم، یعنی جمله ی شماره ی 24

پس چه عددی باید در ۴ ضرب بشه؟ یکی کمتر یعنی ۲۳. بنابراین:

$$t_{24} = 2000 + 23(4) = 2092$$

یعنی المپیک دوره بیست و چهارم در سال ۲۰۹۲ برگزار میشه.

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	...	t_n	...
t_1	$t_1 + 1d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$...	$t_1 + (\dots)d$...

این سوال هم مشابه سوال قبله، با این تفاوت که در سوال قبل به جای قدر نسبت و جمله اول، عدد داشتیم.

در اینجا هم جمله شماره n (یا همون جمله عمومی) رو میفویایم، بنابراین عددی که باید در قدر نسبت ضرب بشه $n - 1$ هست:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

پس به طور کلی داریم:

جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n - 1)d$ است.

دوستای عزیزم، توجه داشته باشید که جمله ای که توی کادر بالا نوشته شده خیلی خیلی مهمه. هم به این دلیل که تنوع سوالایی که ازش مطرح میشه زیاده و هم اینکه در سالهای آینده زیاد ازش استفاده میشه.

اگه بفویایم جمله بالا رو به فارسی بنویسیم به صورت زیر میشه:

قدرنسبت $(n - 1) + \text{جمله اول} = \text{جمله } n$

پس ما برای به دست آوردن جمله عمومی یه دنباله، فقط دو تا عدد رو احتیاج داریم،
جمله اول و قدرنسبت.

کار در کلاس

۱ در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

الف) $5, 10, 15, 20, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $a_n =$

ب) $1, 3, 5, 7, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $b_n =$

پ) $5, 9, 13, 17, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $c_n =$

ت) $13, 7, 1, -5, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $d_n =$

الف:

قدرنسبت رو می‌فویایم به دست بیاریم، بنابراین اختلاف جمله اول و دوم رو حساب می‌کنیم، برابر ۵ هست، بنابراین $d = 5$.

جمله اول رو داریم، قدرنسبت رو هم به دست آوردیم پس به راحتی می‌تونیم جمله عمومی دنباله رو بنویسیم:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d \rightarrow t_n = 5 + (n - 1)5$$

ب:

جمله اول = ۱

قدر نسبت = ۲

بنابراین:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d \rightarrow t_n = 1 + (n - 1)2$$

قسمت پ:

جمله اول = ۵

قدر نسبت = ۴

بنابراین:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d \rightarrow t_n = 5 + (n - 1)4$$

قسمت ت:

جمله اول = ۱۳

قدر نسبت = -۶

بنابراین:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d \rightarrow t_n = 13 + (n - 1)(-6)$$

همینطور که می بینیم، قدر نسبت میتونه به عدد منفی باشه.

*اگه جملات دنباله در حال زیاد شدن باشن یعنی قدر نسبت مثبته

*اگه جملات دنباله در حال کم شدن باشن یعنی قدر نسبت منفیه

- ۱ الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن 10° باشد.
 ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن 10° باشد.
 پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

الف:

۴، ۶، ۸، ۱۰، ...

در اینجا قدرنسبت ۲ هست.

ب:

۱۶، ۱۴، ۱۲، ۱۰، ...

در اینجا قدرنسبت ۲- هست.

پ:

۵، ۳، ۱، -۱، -۳، -۵، -۷، ...

- ۲ الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی درج کرده‌ایم.

این مدل سوال فیلی مهمه پس لطفاً به روش هاش دقت کنید.

بین ۱۸ و ۶۲ باید سه تا عدد درج کنیم ولی نمی‌دونیم چه اعدادی، بنابراین:

۱۸ □ □ □ ۶۲

شماره جملات به صورت زیر همیشه:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵
۱۸ □ □ □ ۶۲

پس جمله اول برابر ۱۸ و جمله پنجم برابر ۶۲ هست . یعنی:

$$t_1 = 18$$

$$t_5 = 62$$

ما می‌دونیم که جمله عمومی یک دنباله حسابی به صورت زیره:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

پس جمله پنجم به دنباله حسابی از فرمول زیر به دست میار:

$$t_5 = t_1 + 4d$$

در این سوال ما t_1 و t_5 رو داریم، پس در فرمول قبل جاگذاری می‌کنیم:

$$62 = 18 + 4d$$

یه معادله و یه مجهول داریم، معادله رو حل می‌کنیم تا d به دست بیاد:

$$d = 11$$

پس جمله عمومی دنباله به صورت زیر همیشه:

$$t_n = 18 + (n - 1)11$$

حالا ما می‌فوییم جملات دوم و سوم و چهارم رو به دست بیاریم. از دو راه می‌تونیم این کار رو انجام بدیم:

۱. جمله اول رو داریم، قدر نسبت رو بوش اضافه کنیم تا جمله دوم به دست بیاد.
 جمله دوم رو که به دست آوردیم، بوش قدر نسبت رو اضافه کنیم تا جمله سوم
 به دست بیاد و به همین ترتیب جمله چهارم رو هم به دست میاریم:

۱۸ ، ۲۹ ، ۴۰ ، ۵۱ ، ۶۲

۲. در جمله عمومی ۲، رو قرار بدیم تا جمله دوم به دست بیاد، ۳ رو قرار بدیم تا
 جمله سوم به دست بیاد و ۴ رو قرار بدیم تا جمله چهارم به دست بیاد:

$$t_2 = 18 + (1)11 = 29$$

$$t_3 = 18 + (2)11 = 40$$

$$t_4 = 18 + (3)11 = 51$$

یه مثال دیگه با هم حل کنیم:

بین ۲۰ و ۱۰ ، پنج واسطه حسابی درج کنید.

به همون روشی که مثال قبل رو حل کردیم، این مثال رو هم حل می‌کنیم:

بین ۲۰ و ۱۰ باید پنج تا عدد درج کنیم ولی نمی‌دونیم چه اعدادی ، بنابراین:

۲۰ ۱۰

شماره جملات به صورت زیر میشه:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷
 ۲۰ ۱۰

پس جمله اول برابر ۲۰ و جمله هفتم برابر ۱۰ هست . یعنی:

$$t_1 = 20$$

$$t_7 = 80$$

ما می‌دونیم که جمله عمومی یک دنباله حسابی به صورت زیره:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

پس جمله هفتم به دنباله حسابی از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$t_7 = t_1 + 6d$$

در این سوال ما t_1 و t_7 رو داریم، پس در فرمول قبل جاگذاری می‌کنیم:

$$80 = 20 + 6d$$

به معادله و به مجهول داریم، معادله رو حل می‌کنیم تا d به دست بیاد:

$$d = 10$$

پس جمله عمومی دنباله به صورت زیر همیشه:

$$t_n = 20 + (n - 1)10$$

حالا ما می‌فوییم جملات دوم و سوم و چهارم و پنجم و ششم رو به دست بیاریم.

در مثال قبل گفتیم که برای این کار دو راه داریم، در اینجا از راه اول استفاده می‌کنیم که ساده‌تره:

جمله اول رو داریم، قدر نسبت رو بهش اضافه کنیم تا جمله دوم به دست بیاد. جمله دوم رو که به دست آوردیم بهش قدر نسبت رو اضافه کنیم تا جمله سوم به دست بیاد و به همین ترتیب جملات بعدی رو هم می‌نویسیم:

$$20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$$

پس ما تونستیم بین 20 و 80 پنج تا واسطه حسابی درج کنیم.

حل تمرین صفحه ۲۴

دنباله حسابی

تمرین

۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

الف) $۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, \dots$

ب) $۱, ۲, ۴, ۸, \dots$

پ) $\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, \dots$

ت) $۱۰, ۷, ۴, ۱, \dots$

ث) $\frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۵}, ۱, \dots$

ج) $۲, ۲, ۲, ۲, \dots$

اگر یاد تون باشه گفتیم، خصوصیت اصلی دنباله حسابی اینه که هر جمله‌ش با اضافه شدن یه عدد ثابت به جمله‌ی قبش به دست میاد.

پس برای اینکه بفهمیم یه دنباله، دنباله حسابی هست یا نه، کافیه تفاضل جمله‌های

متوالیش رو به دست بیاریم، اگر با هم برابر بودن نتیجه میگیریم که یک دنباله حسابی

داریم:

الف:

$$۱۰ - ۳ = ۷$$

$$۱۷ - ۱۰ = ۷$$

$$۲۴ - ۱۷ = ۷$$

با هم برابرن، پس نتیجه می‌گیریم این دنباله، یه دنباله حسابی با قدرنسبت ۷ هست.

توی جزوه گفتیم جمله عمومی یک دنباله حسابی به صورت زیره:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

بنابراین در اینجا داریم:

$$t_n = 3 + (n - 1) \times 7$$

حالا جمله بیست و یکم رو میفوییم، پس به جای n قرار میدیم ۲۱:

$$t_{21} = 3 + (21 - 1) \times 7 = 143$$

ب:

$$2 - 1 = 1$$

$$4 - 2 = 2$$

تفاضل جمله های متوالی با هم برابر نیست، پس این دنباله، حسابی نیست.

پ: تفاضل جملات رو به دست میاریم:

$$2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

این دنباله یه دنباله ی حسابی با قدر نسبت $\sqrt{3}$ هست.

جمله عمومی دنباله رو می نویسیم:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

$$t_n = \sqrt{3} + (n - 1)\sqrt{3}$$

به جای n قرار میدیم ۲۱ تا جمله بیست و یکم رو به دست بیاریم:

$$t_{21} = \sqrt{3} + (21 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$$

ت: تفاضل جملات متوالی رو به دست میاریم:

$$7 - 10 = -3$$

$$4 - 7 = -3$$

$$1 - 4 = -3$$

این دنباله یه دنباله حسابی با قدر نسبت ۳- هست. جمله عمومی دنباله رو می نویسیم:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

$$t_n = 10 + (n - 1)(-3)$$

به جای n قرار میدیم ۲۱ تا جمله بیست و یکم به دست بیاد:

$$t_{21} = 10 + (21 - 1)(-3) = -50$$

ث: تفاضل جملات متوالی رو به دست میاریم:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

این دنباله، حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{5}$ است.

جمله عمومی دنباله رو می نویسیم:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

$$t_n = \frac{2}{5} + (n - 1)\left(\frac{1}{5}\right)$$

به جای n قرار میدیم ۲۱ تا جمله بیست و یکم به دست بیاد:

$$t_{21} = \frac{2}{5} + (21 - 1)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} + \frac{20}{5} = \frac{22}{5}$$

ج : در این قسمت قدرنسبت برابر صفره و همه جمله های دنباله برابر ۲ هستن.

بنابراین جمله بیست و یکم هم برابر صفره

ادامه تمرینها رو می تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam10tr

برای دریافت جزوات سایر پایه ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.